Prof. Solá

5-8-25

ANALISIS MATEMATICO II

ALUMNO:

FECHA:

CURSO:

T1) a) Defina derivada direccional .

Siendo $f(x,y) = \frac{x^2y+y^2sen(x)}{x^2+y^2}$ $si\ (x,y) \neq (0,0), f(x,y) = 0\ si\ (x,y) = (0,0)$, analice si existe $f'((0,0), \check{r})$ para distintos $\check{r} \in R^2$

b) Siendo $x - y + z = 4$ la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en el punto $(2,1,z_0)$, halle las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de f en (2,1) indicando para cada caso, cual es el correspondiente valor de la derivada.

T2) a) Sea el campo f diferenciable en el punto $\bar{A} \in R^2$, demuestre que existe $f'(\bar{A}, \check{r})$ para todo $\check{r} \in R^2$

b) La superficie Σ tiene ecuación $z = h(x,y)$ donde $h(x,y) = f(xy, 2x^2)$ con $f \in C^1$, halle la ecuación del plano tangente a Σ en $(1,1,z_0)$ sabiendo que $\nabla f(1,2) = (2,3)$ y que $f(1,2) = 4$

P1) Dada $f(x,y)$ definida implícitamente por $x + zln(yz-5) + e^{xz} + xy - 1 = 0$, calcule aproximadamente $f(0.3,1,9)$

P2) Dado $f(x,y) = a^2xy^2 - x^2y - 3ay$, halle a para que $f'((1,1), \check{r})$ sea máxima si $\check{r} = \frac{\bar{r}}{\|r\|}$ con $\bar{r} = (2,1)$

P3) Dada la superficie Σ parametrizada por $\phi(\rho,\theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, \rho^2)$, verifique que $(\sqrt[2]{2}/_2, \sqrt[2]{2}/_2, 1)$ es punto regular de Σ y si lo es halle la ecuación del plano tangente a Σ en dicho punto y expréselo en forma cartesiana y paramétrica

P4) Dada $z = {x^2}/_y$ $si\ (x,y) \neq (x,0)$ y 0 en cualquier otro caso , analice continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad en el origen.

AM2	1° Parcial Prof. Solá	HOJA N° 1/4 FECHA 5-8-25

T1 a) Definir derivada direccional

$$f'(\bar{x}_0, \check{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + h\check{r}) - f(\bar{x}_0)}{h}$$

Siendo $f(x,y) = \dfrac{x^2 y + y^2 \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$

analizar si existe $f'((0,0), \check{r})$ para distintos $\check{r} \in \mathbb{R}^2$

$\check{r} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$$f'((0,0), \check{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\check{r}) - \overset{0}{f(0,0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^2a^2\, hb + h^2 b^2 \operatorname{sen}(ha)}{h^2a^2 + h^2 b^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{h^2}(a^2 b h + b^2 \operatorname{sen}(ha))}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2bh + b^2 \operatorname{sen} ha}{h} \quad (*)$$

(*) si $a = 0 \longrightarrow \lim = 0$

si $b = 0 \longrightarrow \lim = 0$

si $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \rightarrow = \lim_{h\to 0} \frac{a^2b\cancel{h}}{\cancel{h}} + \underbrace{\frac{b^2 \operatorname{sen}(ha)}{h} \cdot \frac{a}{a}}_{\to 1} = a^2b + b^2a$

$$\boxed{f'((0,0), \check{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } a=0 \vee b=0 \\ a^2b+b^2a & \text{si } a\neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}}$$

f es derivable en toda dirección

NOTA

TI

1) Siendo $x-y+z=4$ la ec. del plano tangente a la sup. de ec. $z=f(x,y)$ en el punto $(2,1,z_0)$, hallar las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de f en $(2,1)$ indicando, en cada caso cuál es el valor correspondiente de la derivada.

ec. del plano tang a f en $(2,1)$:

$$z = f(2,1) + f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1)$$

x enunc: $z = 4 - x + y$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x(2,1) = -1 \\ f'_y(2,1) = 1 \end{array}\right\} \nabla f_a$$

f admite plano tangente $\Rightarrow$ f es diferenciable $\Rightarrow f'((2,1),\breve{r}) = \nabla f_{(2,1)} \cdot \breve{r}$

y la dirección de máximo crecimiento es el gradiente

$\boxed{\vec{r}_{max} = (-1,1)}$ $\qquad$ $\boxed{\vec{r}_{min} = (1,-1)}$ $\hookrightarrow -\nabla f_{(2,1)}$

$\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ dos direcciones donde $f'((2,1),\vec{r}_{1,2}) = 0$ $\qquad$ $\boxed{\begin{array}{l} \vec{r}_1 = (1,1) \\ \vec{r}_2 = (-1,-1) \end{array}}$

$$f'((2,1),\breve{r})\big|_{max} = \|\nabla f_{(2,1)}\| = \sqrt{2}$$

$$\boxed{f'((2,1),\breve{r})\big|_{max} = \sqrt{2}}$$

$$\boxed{f'((2,1),\breve{r})\big|_{min} = -\sqrt{2}}$$

$$\boxed{f'((2,1),\breve{r}_1) = f'((2,1),\breve{r}_2) = 0}$$

NOTA

AM 2	1° parcial Prof. Solá	HOJA N° 2/4 FECHA 5-8-25

T2 a) Sea el campo f diferenciable en el punto $\bar{A} \in \mathbb{R}^2$ demostrar que existe $f'(A, \breve{r})$ $\forall \breve{r} \in \mathbb{R}^2$

f diferenciable en $\bar{A}$ $\Rightarrow$ en un entorno de A : $E(A)$

$$\Rightarrow f(\bar{A}+\bar{v}) - f(\bar{A}) = \nabla f(\bar{A}) \cdot \bar{v} + \varepsilon(\bar{v}) \|\vec{v}\| \xRightarrow{\vec{v} = h\breve{u}}$$

$$\Rightarrow f(\bar{A}+h\breve{u}) - f(\bar{A}) = \bar{\nabla} f(\bar{A}) \cdot h\breve{u} + \varepsilon(h\breve{u}) \|h\breve{u}\| \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{por } h]{\text{divido todo}} \frac{f(A+h\breve{u}) - f(\bar{A})}{h} = \frac{\bar{\nabla} f(\bar{A}) \cancel{h}\breve{u}}{\cancel{h}} + \frac{\varepsilon(h\breve{u}) \cdot |h|}{h} \quad \{ \|\breve{u}\| = 1 \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(A+h\breve{u}) - f(\bar{A})}{h} = \bar{\nabla} f(\bar{A}) \breve{u} + \varepsilon(h\breve{u}) \frac{|h|}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(A+h\breve{u}) - f(\bar{A})}{h} = \lim_{h \to 0} \underbrace{\nabla f(A) \cdot \breve{u}}_{\text{no depende de } h} + \underbrace{\lim_{h \to 0} \varepsilon(h\breve{u}) \frac{|h|}{h}}_{\to 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(A+h\breve{u}) - f(\bar{A})}{h}}_{\text{definición de derivada direccional}} = \nabla f(A) \cdot u$$

$\nabla f(\bar{A})$ existe pues f es dif en A

NOTA

T2

b) La sup Σ tiene ecuación $z = h(x,y)$ donde $h(x,y) = f_{(xy, 2x^2)}$ con $f \in C^1$, hallar la ec. del plano tangente a Σ en $(1,1,z_0)$ sabiendo que $\bar{\nabla} f_{(1,2)} = (2,3)$ y que $f_{(1,2)} = 4$

Ec. plano tg a h en $(1,1,z_0)$

$$z = h_{(1,1)} + h'_{x(1,1)} \cdot (x-1) + h'_{x(1,1)} (y-1)$$

h es dif porque f es dif.

Sea $\bar{g}(x,y) = (xy, 2x^2) \Rightarrow h(x,y) \stackrel{\swarrow}{=} f_{(\bar{g}(x,y))}$

$\bar{g}_{(1,1)} = (1,2)$

$$Dh(x,y) = Df_{(\bar{g}(x,y))} D\bar{g}_{(x,y)}$$

$$D\bar{g}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 4x & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dh_{(1,1)} = Df_{(\bar{g}(1,1))} D\bar{g}_{(1,1)} = \underbrace{Df_{(1,2)}}_{\text{x enunciado}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = [2 \quad 3] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = [14 \quad 2] = [h'_{x(1,1)} \quad h'_{y(1,1)}]$$

x enunciado

$$h_{(1,1)} = f_{(\bar{g}(1,1))} = f_{(1,2)} \stackrel{\downarrow}{=} 4$$

$$\Rightarrow \quad z = 4 + 14(x-1) + 2(y-1) =$$
$$= 4 + 14x - 14 + 2y - 2$$

ec. pl. tang a h en $(1,1,z_0)$

$$\boxed{z = 14x + 2y - 12}$$

NOTA

AM2	1º parcial Prof. Sole	HOJA Nº 3/4 FECHA 5-8-25

(P1) Dada $f(x,y)$ definida implícitamente por

$$x + z\ln(yz-5) + e^{xz} + xy - 1 = 0$$

calcular, aprox, $f(0{,}3, 1{,}9) \longrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=2 \end{matrix}$

$$F(x,y,z) = x + z\ln(yz-5) + e^{xz} + xy - 1$$

xTFI $F(0,2,z_0)=0 = 0 + z_0\ln(\underbrace{2z_0-5}_{z=3 \text{ cumple}}) + \cancel{e^0} + 0 \cancel{-1}$

$$F'_x = 1 + ze^{xz} + y \longrightarrow F'_x(0,2,3) = 6$$

$$F'_y = \frac{zy}{yz-5} + x \longrightarrow F'_y(0,2,3) = 6$$

$$F'_z = \ln(yz-5) + \frac{zy}{yz-5} \rightarrow F'_z(0,2,3) = 6$$

xTFI: $f'_x(0,2) = -\dfrac{F'_x(0,2,3)}{F'_z(0,2,3)} = -\dfrac{6}{6} = \boxed{-1 = f'_x(0,2)}$

$f'_y(0,2) = -\dfrac{F'_y(0,2,3)}{F'_z(0,2,3)} = -\dfrac{2}{6} = \boxed{-1 = f'_y(0,2)}$

ec. pl. tang a f en $(0,2,f(0,2))$ $\qquad f(0,2) = z = 3$

$$z = f(0,2) + f'_x(0,2)\, x + f'_y(0,2)\,(y-2) =$$

$$= 3 + (-1)\,x + (-1)(y-2)$$

$$z = -x - y + 5$$

$$f(0{,}3, 1{,}9) \cong -0{,}3 - 1{,}9 + 5 = \frac{14}{5}$$

$$\boxed{f(0{,}3;\ 1{,}9) \cong 2{,}8}$$

NOTA

(P2) Dado $f(x,y) = a^2xy^2 - x^2y - 3ay$ hallar 'a' para que $f'((1,1),\check{r})$ sea máximo si $\check{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ con $\vec{r} = (2,1)$

f es diferenciable (es una función polinómica).

$f'((1,1),\check{r})|_{max}$ se da en la dirección del gradiente

$$\Rightarrow \nabla f_{(1,1)} = k\,(2,1) \qquad k \in \mathbb{R}_{>0}$$

$$f'_x = a^2y^2 - 2xy \longrightarrow f'_{x\,(1,1)} = a^2 - 2$$

$$f'_y = 2a^2xy - x^2 - 3a \rightarrow f'_{y\,(1,1)} = 2a^2 - 1 - 3a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2 = 2k \\ 2a^2 - 3a - 1 = k \end{cases} \rightarrow a^2 - 2 = 2(2a^2 - 3a - 1)$$

$$a^2 \cancel{-2} = 4a^2 - 6a \cancel{-2}$$

$$0 = 3a^2 - 6a = \underbrace{3a(a-2) = 0}$$

$$\boxed{a = 0 \;\vee\; a = 2}$$

NOTA

AM2	1° parcial Prof. Solá	HOJA N° 4/4 FECHA 5-8-25

(P3) Dada la sup. Σ parametrizada por $\phi(\rho,\theta)=(\rho\cos(\theta), \rho\,\text{sen}(\theta), \rho^2)$ verificar que $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$ es punto regular de Σ y, si lo es, hallar la ecuación del plano tangente a Σ en dicho punto y expresarlo en forma cartesiana y paramétrica.

$P=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \rightarrow$ para que P sea punto regular $\Rightarrow N_{\Sigma P} \neq \bar{0}$

$P \in \Sigma \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = (\underbrace{\rho\cos(\theta), \rho\,\text{sen}(\theta)}_{\theta=\frac{\pi}{4}}, \rho^2) \quad \rho>0$

$\rho\cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho\,\text{sen}(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\rho=1}$

$P=\phi_{(1,\frac{\pi}{4})}$

Hallo $N_{\Sigma P}$:

$$\begin{cases} \phi'_\rho = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), 2\rho) \rightarrow \phi'_{\rho(1,\frac{\pi}{4})} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) \\ \phi'_\theta = (-\rho\,\text{sen}(\theta), \rho\cos(\theta), 0) \rightarrow \phi'_{\theta(1,\frac{\pi}{4})} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \end{cases}$$

$$N_{\Sigma P} = \phi'_{\rho(1,\frac{\pi}{4})} \times \phi'_{\theta(1,\frac{\pi}{4})} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$N_{\Sigma P} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1) \neq \bar{0} \Rightarrow$ $\boxed{\text{P es punto regular}}$

$N(x,y,z) = N\,P$

$-\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + z = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)\underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)}_{P} = -1$

$$\boxed{z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 1}$$

$$\boxed{P_T : \bar{T}_{(x,y)} = (x, y, \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 1)}$$

NOTA

(P4) Dado: $z = \frac{x^2}{y}$ si $(x,y) \neq (x,0)$ y 0 en cualquier otro caso, analizar continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad en el origen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } (x,y) \neq (x,0) \Rightarrow \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Continuidad

- $f(0,0) = 0$
- $¿\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{(*)}{\overset{\text{si } y=0}{=}} 0$ $\quad \neq \Rightarrow \nexists \lim$

(*) si $y \neq 0$ $\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y} \underset{\text{si } y=x^2}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ NO es continua en } (0,0)}$

$\Downarrow$

$\boxed{f \text{ NO es diferenciable en } (0,0)}$

Derivabilidad $\quad$ si $\check{r} = (a,b) \quad a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\check{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\check{r}) - f(0,0)^{\,0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} =$$

si $b=0$ $\overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \longrightarrow \boxed{f'((0,0),\check{r}) = 0 \text{ si } b=0}$

si $b\neq 0$ $(*) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}} \cdot \frac{\cancel{h^2} a^2}{\cancel{h} b} = \frac{a^2}{b}$

$$\boxed{f'((0,0),\check{r}) = \begin{cases} 0 & \text{si } b=0 \\ a^2/b & \text{si } b\neq 0 \end{cases}}$$

$\boxed{f \text{ es derivable en toda dirección en } (0,0)}$

NOTA